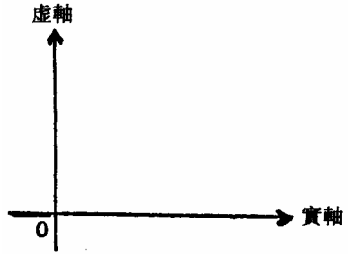
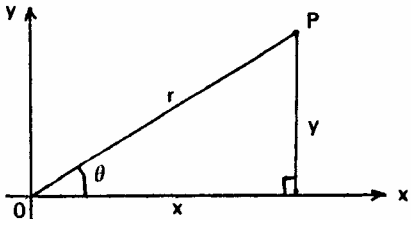
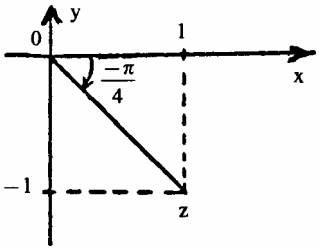
單元 10：複數

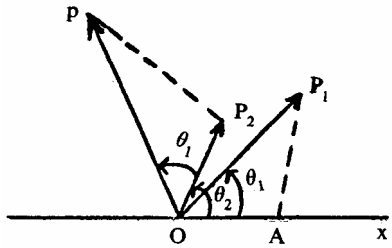
特定目標：

1. 發展複數的概念。
2. 理解複數的標準式及極形式。
3. 理解複數的幾何意義。
4. 理解及運用棣美弗定理。

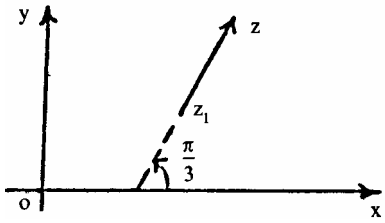
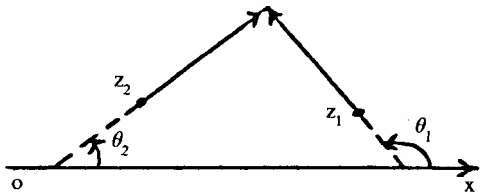
內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
10.1 複數的標準式	1	由考慮 $x^2+1=0$ 的根，教師可引進單位虛數 $i=\sqrt{-1}$，並可使用例子，如 $x^2+x+1=0$ 介紹虛數的標準式 $a+bi$。實部與虛部應清楚顯示。 學生應知道 $a+bi=0$ 當且僅當 $a=b=0$ 透過此定義，教師不難指出兩複數的等式 $a+bi=c+di$ 當且僅當 $a=c$ 及 $b=d$。
10.2 複數的加、減、乘及除法運算	2	此處強調運算技巧及在乘法運算時，學生應留意恆等式 $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ 及 $i^2=-1$。教師亦應提及複數 $a\pm bi$ 為共軛複數，且互為共軛。 共軛複數的性質(即 $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$)可應用於複數的除數，例如，將 $\frac{a+bi}{c+di}$ 的分子及分母乘以 $c+di$ 的共軛複數，即 $c-di$，可得到 $\frac{a+bi}{c+di}$ 的標準式。 在此階段，教師可引人符號 z 代表一複數 $x+yi$ 及 $\overline{z}$ 代表其共軛複數，即 $\overline{z}=x-yi$。教師可介紹以下性質： (1) 若 z_1 及 z_2 為兩複數，則 (i) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		(ii) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ (iii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ 其中 $z_2\neq 0$ (2) 若 $z=p+qi$ 為方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，則 $\overline{z}=p-qi$ 亦為該方程的根，其中 a，b 及 c 為實數。 (3) 若 $f(x)$ 為一實系數的多項式及 $z=p+qi$ 為方程 $f(x)=0$ 的根，則 $\overline{z}=p-qi$ 亦為方程的根。
10.3 複數的極形式	2	教師可引導學生在阿根圖上表示一複數。圖中的實軸與虛軸必須註明。  學生應懂得將複數 z 的標準式 $x+yi$ 及極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 互化。 有關公式如下： $z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$ 或 $r=x^2+y^2$， $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ 和 θ 的值決於 x 及 y 的符號。 在阿根圖上，若點 P 表示複數 z，學生應留意 r 稱為 z 的模數，r 可記為 $\lvert z\rvert$ 及是一非負數。θ稱為 z 的輻角及記為 $\arg z$。

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		 教師應清楚指出 θ 通常不是唯一的，即 $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+2n\pi$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$。為避免混淆，其主值(即值域在 $-\pi<\theta\le\pi$ 間) 經常被用作去解有關難題。 符號 $r \operatorname{cis}\theta$ 為 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的短式，並可介紹給能力較高的學生。 教師可舉出下列例子或給予學生作為練習之用： *例一* 若 $z=2-2i$，則 $\lvert z\rvert=2\sqrt{2}$ 及 $\arg z$ 的主值為 $-\frac{\pi}{4}$。 教師可指出在阿根圖上簡略註出一點的位置可避免在寫模數及輻角時的錯誤。 

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
10.4 複數在極形式的乘法及除法	2	*例二* 試證明 $\lvert\bar{z}\rvert=\lvert z\rvert$， $\arg\bar{z}=-\arg z$ 及 $z\bar{z}=\lvert z\rvert^2$。 用複數及其共軛數去表示模數是很有用處的。教師可強調模數的平方相等於在阿根圖上該複數坐標的平方和而不是 $x^2+(iy)^2$。 *例三* 若複數 $z_1=x_1+\bar{v}y_1$ 及 $z_2=x_2+\bar{v}y_2$ 在阿根圖上分別以點 P_1 及 P_2 表示，則 P_1 及 P_2 的中點表示 $\frac{z_1+z_2}{2}$。若 P_3 表示 z_1+z_2，則 $OP_1P_2P_3$ 為一平行四邊形。 學生應注意向量的加數原理亦可應用於複數。他們可將每一複數與由阿根圖上的原點連至代表該複數的點的向量聯繫。複數的加法和減法在幾何上可以向量加法和減法代表。 教師可讓學生發現兩複數 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ 及 $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ 的積可以 $r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$ 表示，剛好是模數為 r_1r_2 及幅角為 $\theta_1+\theta_2$ 的複數的標準式。教師可將結果撮要為： $\lvert z_1z_2\rvert=\lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert$ 及 $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$。 學生應能應用此結果至多個極形式複數上，及應看出當一已知複數與 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 相乘時，其模數被 r 相乘，而其幅角則與 θ 相加。在幾何上，$z=z_1z_2$ 可在阿根圖上說明。其中 O 為原點，A 代表 1 及三角形 OAP_1 與 OP_2P 相似。 

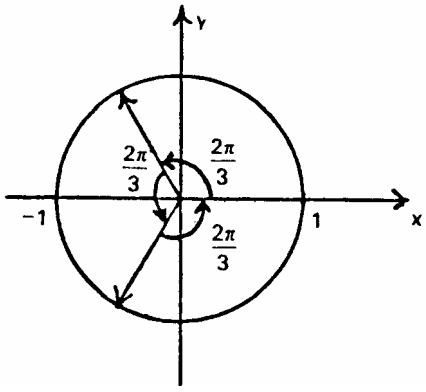
內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
10.5 **簡單軌跡與複數**	4	特別地，以 i 乘一複數，結果是將其阿根圖的代表向量逆時針旋轉一直角，但長度保持不變。 將 z_1 除以 z_2 可由 $z_1 = z_2 z$ 或 $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ $= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $= r_2 r\left[\cos(\theta_2+\theta) + i\sin(\theta_2+\theta)\right]$ 得出 不難看出 $\lvert z\rvert = r = \frac{r_1}{r_2}$ 及 $\arg z = \theta = \theta_1 - \theta_2$ 即 $\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$ 及 $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$。 *例* 設在阿根圖上點 O、A、$Z_1$、$Z_2$、$Z_3$ 分別代表複數 0、1、z_1、z_2、z_3 及三角形 OZ_2Z_3 與 OZ_1A 相似。試證 $z_3 = \frac{z_2}{z_1}$。 學生應認識一些簡單軌跡。例如： (1) $\lvert z+1\rvert = \lvert z-3\rvert$ 為連接點 $z=-1$ 及 $z=3$ 的線段的垂直平分線。事實上，教師可提醒學生，將 $z = x + iy$ 代入方程後所得到的 x 與 y 的關係，就是該軌跡的方程。 即 $\lvert x+iy+1\rvert = \sqrt{(x-3)^2+y^2}$ $(x+1)^2 + y^2 = (x-3)^2 + y^2$ $2x+1 = -6x+9$ $x = 1$ 學生應看出 $\lvert z+1\rvert = \lvert z-3\rvert$ 可演繹為由 -1 到 z 與由 3 到 z 的距離相等。 (2) $\lvert z - z_1\rvert = 4$ 是一中心為 z_1 及半徑 4 單位的圓。 (3) $\lvert z-2\rvert + \lvert z+2\rvert = 6$ 是一焦點在點 2 及–2 的橢圓。

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		(4) $\big\lvert\, \lvert z-5i\rvert - \lvert z+5i\rvert \,\big\rvert = 6$ 是一焦點在點 $5i$ 及$-5I$ 的雙曲線。 (5) $\arg z = \pi$ 是負實線軸。 (6) $\arg(z - z_1) = \frac{\pi}{3}$ 是一由點 z_1 開始及沿方向 $\frac{\pi}{3}$ 的射線。 教師應指出向量 $Z - Z_1$ 與實線軸成夾角 $\frac{\pi}{3}$，及 Z 不能在通過 Z_1 的線的另外一個方向上，否則向量 $z - z_1$ 的方向將變為 $-\frac{2\pi}{3}$。  (7) $\arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) = \frac{\pi}{2}$ 可寫成 $\arg(z-z_1) - \arg(z-z_2) = \frac{\pi}{2}$。 

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
10.6 棣美弗定理	3	設 $\arg(z-z_1)=\theta_1$ 及 $\arg(z-z_2)=\theta_2$， $\theta_1-\theta_2=$ 通過 z_1 及通過 z_2 的兩線段的夾角。 $\therefore z$ 在以該線段(z_1 及 z_2 為兩端點)為直徑之半圓上。 教師應引導學生證明 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 其中 n 為正整數。可以應用數學歸納法證明。 *例一* 對 $\cos 3\theta+i\sin 3\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^3$，將右面的式子利用二項式定理展開，學生可由等式兩邊的實部與虛部相等得 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ 及 $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ *例二* 若 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，求證 $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin n\theta$ 從而以倍角表 $\sin^5\theta$。 透過考慮 $(2i\sin\theta)^5=\left(z-\dfrac{1}{z}\right)^5$，學生應能得到 $2^5 i\sin^5\theta=\left(z^5-\dfrac{1}{z^5}\right)-5\left(z^3-\dfrac{1}{z^3}\right)+10\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$ 或 $\sin^5\theta=\dfrac{1}{16}(\sin 5\theta-5\sin 3\theta+10\sin\theta)$。 學生應認識到恆等式 $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta$ 及 $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin n\theta$ 對解類似的問題非常有用。 棣美弗定理可推廣到 n 為負數及 n 為有理數的一般情形。

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		當 n 為負整數時，則 $m=-n$ 為一正整數，及 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}$ $=\dfrac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^m}=\dfrac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}$ $=\dfrac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{1}=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)$ $=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 證明棣美弗定理成立。 當 n 為一分數時，它可寫成為 $\dfrac{p}{q}$ 其中 p 及 q 為整數及 q 為正數。這裡要取消 q 次方根。教師應強調對於 $\cos\theta+i\sin\theta$ 有 q 個不同值，而 $\cos\dfrac{p}{q}\theta+i\sin\dfrac{p}{q}\theta$ 是其中一個 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$ 的值。 推而廣之，$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$ 應為 $\cos\left(\dfrac{p}{q}\theta+\dfrac{2k\pi}{q}\right)+i\sin\left(\dfrac{p}{q}\theta+\dfrac{2k\pi}{q}\right)$ 其中 $k=0$, 1，2， … ，$q-1$。
10.7 1 的 n 次方根	3	1 的立方根是一有趣例子： $z^3=1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$ 其中 $k=0$，1，2 $z=1$ 或 $\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ 或 $\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$ $=1$ 或 $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 或 $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 若 1，ω，ω^2 為 1 的立方根，它們的性質有： (1) $\omega^3=1$ (2) $1+\omega+\omega^2=0$ (3) $(\omega^2)^2=\omega^4=\omega$，即每一複數根為另一根的平方。

105

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		(4) $1=\omega^3=\omega^6=\cdots$， $\omega=\omega^4=\omega^7=\cdots$ 及 $\omega^2=\omega^5=\omega^8=\cdots$ 1 的立方根可以阿根圖表示出來。  相似地，1 的 n 次方根是 $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ 其中 $k=0$，1，2，⋯，$n-1$ 以下數點可作討論： (1) 給予 k 多一些數值不表示得到多一些根，因為當 $k=n$ 時即輻角為 2π，其根與 $k=0$ 時相同，當 $k=n+1$ 時，又與 $k=1$ 時重疊，餘此類推。 (2) 所有根的模數全為 1，它們在阿根圖上平均環繞一單位圓，它們的相鄰輻角互相相差 $\frac{2\pi}{n}$。 (3) 於實軸對稱，所以複數根是共軛的。

106

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		(4) 若 n 為偶數，則 k 的其中一個值是 $\frac{n}{2}$。其時輻角是 π，及其對應實根是 $z=-1$。 在此情況， $z^2-1=(z-1)(z+1)$ 為 z^n-1 的二次因式。 (5) 若 n 為奇數，則 $z=1$ 是唯一的實根，而 $z-1$ 是唯一的實數因式。 (6) 任一正實數 a 可寫成 $a(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)$ 而它的 n 次平方根相對是 $\sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$，$k=0$，1，2，⋯，$n-1$，其中 $\sqrt[n]{a}$ 為 a 的 n 次正根。 *例* 32 的 5 次根是 2， $2\left(\cos\frac{2\pi}{5}\pm i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$ 及 $2\left(\cos\frac{4\pi}{5}\pm i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$。 學生應能運用棣美弗定理找出一複數的 n 次方根，例如，若 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ 其中 $k=0$，1，2，⋯，$n-1$。
	17	