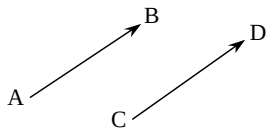
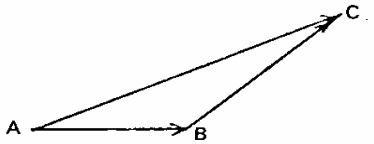
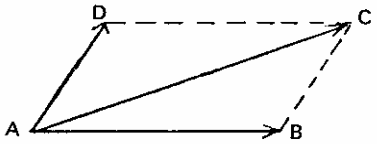
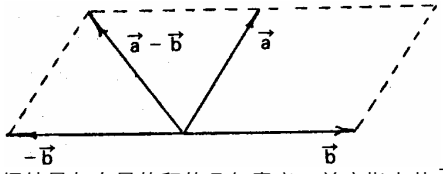
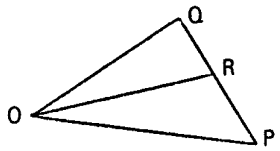
单元 **8**：　　二维空间的向量

特定目标：

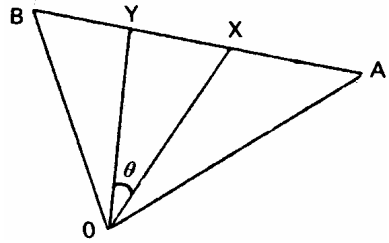
1. 学习向量的概念及表示法。
2. 学习二维空间向量的某些性质及运算。
3. 理解二维空间向量的几何表示法。
4. 应用向量方法解某些几何问题。

内容	时间分配	教学建议
8.1 纯量及向量、向量相等、零向量及单位向量	2	教师可利用纯量的例子，如质量、长度、时间、温度等，以及向量(或称矢量)的例子，如力、位移、速度、加速度等说明纯量与向量两者间的分别。 向量的几何表示法(即以有向线段表示向量)有助于学生对向量的直观认识，宜尽早引入。学生须认识课本印刷时采用的向量符号(如 **a**、$\overrightarrow{AB}$ 等)以及书写时采用的符号(如 $\vec{a}$ 、 $\underline{a}$ 等)；表示向量大小的符号分别是 $\lvert \mathbf{a} \rvert$、$\lvert \overrightarrow{AB} \rvert$、$\lvert \vec{a} \rvert$、$\lvert \underline{a} \rvert$。教师须使学生养成在字母上加上箭号 (→) (例如 $\vec{a}$) 或在字母下加线(例如 $\underline{a}$)以表示向量的习惯。 教师须强调若两向量的大小与方向都相同，则两向量相等。例如，若 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ，则 $\lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \lvert \overrightarrow{CD} \rvert$，且 AB//CD。  之后教师可引入大小是零而无特定方向的零向量，一般记作 $\vec{0}$ 或 $\underline{0}$。介绍单位向量时，教师可定为长度为 1 的任何向量。单位向量常用以表示方向。

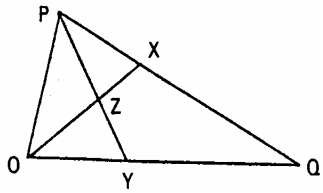
内容	时间分配	教学建议
8.2 向量的和及差、纯量与向量相乘	3	向量的加法最宜以三角形定律说明，其图示法如下：  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ 亦可用平行四边形定律  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ 教师可用两个位移的向量和两个力的合力或两个速度的合速度作为实例。亦可教授多边形定律，作为三角形定律的引申。 两向量的差 $\vec{a} - \vec{b}$ 可视作两向量的和 $\vec{a} + (-\vec{b})$。  教师可介绍纯量与向量的积的几何意义，并应指出若 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ ，则 $\overrightarrow{AB}$ 平行于 $\overrightarrow{CD}$ ；且 $\lvert \overrightarrow{AB} \rvert = \lvert k\overrightarrow{CD} \rvert$; 若 $k > 0$ ，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 同向； 若 $k < 0$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 反向。在教师指导下，学生利用图示法不难发现以下法则：

内容	时间分配	教学建议
		$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ $r(s\vec{u})=(rs)\vec{u}=s(r\vec{u})$ $(r+s)\vec{u}=r\vec{u}+s\vec{u}$ $r(\vec{u}+\vec{v})=r\vec{u}+r\vec{v}$ 教师可举出以下各例： *例一* ABCD 是正方形，X、Y 是 BC、CD 的中点。 若 $\overrightarrow{AX}=\vec{p}$，$\overrightarrow{AY}=\vec{q}$， (*a*) 以 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{BC}$ 表 $\vec{p}$ 及 $\vec{q}$； (*b*) 以 $\vec{p}$ 及 $\vec{q}$ 表 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{BC}$。 *例二* 若 ABCD 是平行四边形，证明 (*a*) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{DB}$； (*b*) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AD}=\vec{0}$。 *例三* 图中 mPR = nRQ，其中 m、n 是正常数，证明 $m\overrightarrow{OP}+n\overrightarrow{OQ}=(m+n)\overrightarrow{OR}$。 

内容	时间分配	教学建议
8.3 向量在直角坐标系的表示法	2	教师应先教授单位向量 $\vec{i}$、$\vec{j}$，然后利用实例，解释如何以 $\vec{i}$、$\vec{j}$ 表示直角坐标面内的任一向量。对任一向量 $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ 其大小是 $\lvert\vec{u}\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$，而方向 $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$。考虑(x, y)点所在的象限可定出向量与正 x 轴间的角θ。例如向量 $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ 的大小是 $\lvert\vec{u}\rvert=\sqrt{2}$，方向是 $\theta=\tan^{-1}(1)=45°$，而向量 $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$ 的大小是 $\lvert\vec{v}\rvert=\sqrt{2}$，方向是 $\theta=\tan^{-1}(-1)=315°$。教师此时可在直角坐标系的函义内重温两向量的相等、和及差等观念的意义，并给予足够的练习。
8.4 两向量的纯量积	4	学生熟习 $\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ 及 $\vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ 的表示方法后，可学习两向量的纯量积（亦称点积）的定义。 $\vec{u}\cdot\vec{v}=\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert\cos\theta$，其中 θ 是 $\vec{u}$，$\vec{v}$ 之间的角，而 $\vec{u}$，$\vec{v}\neq\vec{0}$。 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ 若 $\vec{u}=\vec{0}$ 或 $\vec{v}=\vec{0}$。 利用 $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=1$，$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0$，亦可得出另一定义 $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2$。教师须提醒学生在表示点积时须用点「·」。 教师可引导学生推出下列纯量积的性质： $\vec{u}\cdot\vec{u}=\lvert\vec{u}\rvert^2$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ $k(\vec{u}\cdot\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$ $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ 当学生熟悉两向量相等当且仅当两者有相同的 $\vec{i}$、$\vec{j}$ 分量这个观念，教师可将这观念推广至以两个不平行的向量 $\vec{u}$、$\vec{v}$ 表示的向量。直观上，学生不难理解若 $a_1\vec{u}+b_1\vec{v}=a_2\vec{u}+b_2\vec{v}$，则 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$。教师可举例说明，但无须教授基的正式定义。下列例题可作练习：

内容	时间分配	教学建议
		例一 已知三点 A(1, 3)，B(−2, 4)，C(−1, 5)， (*a*) 以 $\vec{i}$ 及 $\vec{j}$ 表 $\overrightarrow{BA}$ 及 $\overrightarrow{BC}$， (*b*) 求 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$，及 (*c*) 求 ∠ABC (准确至 0.1°)。 *例二* 图中，AX = XY = YB。  若 $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - \vec{j}$， $\overrightarrow{OB} = 10\vec{i} + 5\vec{j}$， (*a*) 以 $\vec{i}$ 及 $\vec{j}$ 表 $\overrightarrow{OX}$ 及 $\overrightarrow{OY}$， (*b*) 求 $\lvert\overrightarrow{OX}\rvert$ 及 $\lvert\overrightarrow{OY}\rvert$，及 (*c*) 求 cosθ 的值。 *例三* 已知 $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$， $\overrightarrow{AC} = a\vec{i} - 12\vec{j}$， $\overrightarrow{AB} = -8\vec{i} + b\vec{j}$ (*a*) 若 A、B、C 共线，求 a； (*b*) 若 AD ⊥ AB，求 b。

内容	时间分配	教学建议
8.5 向量的应用、线段分点、平行及垂直	3	向量方法可应用于解答课程内其它课题的问题，例如解析几何及三角。 以某点的位置向量这个概念为开始，教师可引导学生得出以比 m∶n 分割线段 AB 的点的位置向量 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{m+n}\left(n\vec{a} + m\vec{b}\right)$， 其中 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 及 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ 分别是 A 及 B 的位置向量。 在三角学上，教师可利用点积 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 及 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}$ 引导学生得出余弦公式 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$，学生亦须熟悉以下事实： (1) 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$，则 AB ⊥ BC。 (2) 若 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$，则 AB // CD。 (3) 若 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$，A、B、C 共线。 利用向量方法证明几何学上某些重要结果的例子甚多，例如， (1) 连接某三角形两边中点的线段必平行于第三边，其长度且等于第三边的一半。 (2) 连接某圆的圆心及圆上一弦的中点的线段必垂直于该弦。 (3) 半圆的圆周角为直角。 (4) 菱形的对角线互相垂直平分。 (5) 三角形的三条高线共点。 (6) 三角形的三条中线共点。 下列为另类练习例子。 *例一* 图中， $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$， $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$， $2\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{XQ}$， $3\overrightarrow{OY} = 2\overrightarrow{YQ}$。

内容	时间分配	教学建议
		(*a*) 以 $\vec{p}$ 及 $\vec{q}$ 表 $\overrightarrow{OX}$ 。 (*b*) 若 $\overrightarrow{OZ}=\lambda\overrightarrow{OX}$ ， $\overrightarrow{PZ}=\mu\overrightarrow{PY}$ ，证明 $5\lambda-6\mu=0$ 且 $2\lambda+3\mu-3=0$ 。 (*c*) 试解 λ 以求 PZ : PY。  *例二* 证明若 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 为任意向量，则 (*a*) $\lvert\vec{u}\cdot\vec{v}\rvert\le\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert$ ， (*b*) $\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert\le\lvert\vec{u}\rvert+\lvert\vec{v}\rvert$ 。
	14	