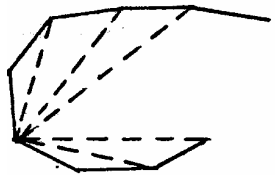
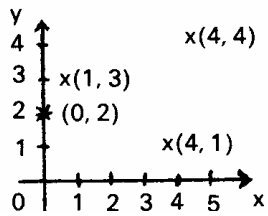
单元 7：解析几何

特定目标：

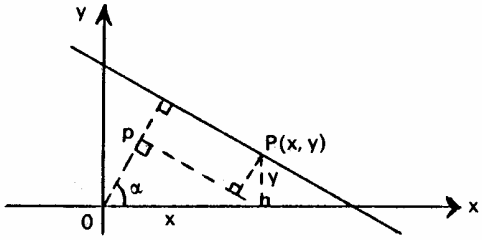
1. 求坐标平面上直线图形的面积。
2. 求两直线的交角。
3. 了解直线的法线式，并利用有关知识计算距离。
4. 求圆的方程及圆与直线的交点。
5. 求圆的切线方程。
6. 求直线族及圆族的方程。
7. 求在标准位置上抛物线、椭圆及双曲线的方程。
8. 获取参数方程与轨迹的概念，及解简易轨迹问题。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
7.1 平面直角坐标及两点间的距离	1*	因为学生在中一至中三阶段应已学习平面直角坐标的基本概念，所以现在只需作简单温习。教师可说明距离公式及截点公式，当谈及截点公式时，教师应强调外分点，即若 R 是 PQ 延在线一点，而 PR：RQ＝r：1，则 r 将为负数。 *例* 某圆的圆心为 O(3, 4)。若 A(1, 1)是该圆某一直径的端点，求另一端点的坐标。
7.2 直线图形的面积	3	学生应在引导下发现顶点为 O(0, 0)，A(x_1, y_1)及 B(x_2, y_2)的三角形的面积可被写成两直角三角形及一梯形面积的代数和，答案是 $\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$。学生亦应留意到若顶点 O、A 及 B 以逆时针方向选出，则所得是一正数；否则，则得一负数。 拥有以上知识，则任何坐标平面上的三角形可被视为三个包括原点为顶点的三角形的代数和，因此可用下列公式计算：

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
		三角形的面积 $= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$ 其中(x_1, y_1)，(x_2, y_2)及(x_3, y_3)是根据逆时针方向定出的三角形顶点的坐标。 教师应告诉学生，为了方便起见，以上公式可写成 三角形的面积 $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$ 其中 x_1y_2，x_2y_3 及 x_3y_1 被视为联线向下的积，带正值；x_2y_1，x_3y_2 及 x_1y_3 被视为联线向上的积，带负值；而面积则为所有数项总和的一半。 最后，任何平面上的 n 边形，可被视为 (n – 2) 个三角形所组成，如下图：  由此，可得下列公式： 多边形的面积 $= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - \cdots - x_1y_n)$ 其中(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)…(x_n, y_n)是根据逆时针方向定出的顶点坐标。 同样，为了方便起见，学生可将公式写成

内 容	时间分配	教 学 建 议
		多边形的面积 $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$ 在练习中，譬如求顶点为 (1，3)，(4，1)，(4，4) 及 (0，2) 的四边形面积，教师应经常提醒学生公式内各点一定是根据逆时针方向排列的。由此，上述多边形的面积是 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 4 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ 而非 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$  在应用公式前画一草图是合乎需要的。

内 容	时间分配	教 学 建 议
7.3 直线的倾角及斜率	1*	直线斜率的定义应为该直线对正 x 轴的倾角的正切，而倾角的范围是 0°至 180°。 因此，连接 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 两点直线的斜率是 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$。
7.4 两直线的交角	3	已知两直线对正 x 轴的倾角分别为 α和β，则两直线的交角等于 α和 β的差。 因为 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$ $= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$， 所以两直线的交角是 $\tan^{-1}\left\lvert\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right\rvert$。 公式中的绝对值符号保证所得的角是两直线间的锐角。 至此，学生应不难理解斜率分别为 m_1 及 m_2 的直线平行 (即两线之交角 $\theta = 0°$)当且仅当 $m_1 = m_2$；另外，两线垂直（即 θ ＝ 90°）当且仅当 $m_1 m_2 = -1$。 *例* 直线 $x + y = 5$ 与 $2x - y = 7$ 间之锐角是 $\tan^{-1}\left\lvert\frac{-1-2}{1+(-2)}\right\rvert = 71.6°$。
7.5 直线的方程	1*	教师应对学生强调一直线的方程实际上是直线上任意一点的 x 与 y 坐标的关系。直线方程的标准式包括 (1)一般式 (2)两点式 (3)点斜式 (4)斜截式 (5)截距式

内 容	时间分配	教 学 建 议
7.6 法线式	5	学生应在教师指导下，利用直线与原点的距离 $p(p>0)$，和直线的法线对正 x 轴的倾角α，写出直线的法线式。 (当 $p>0$，则 $0 \le \alpha < 2\pi$， 当 $p=0$，则 $0 \le \alpha < \pi$)  根据上图，学生不难证明直线上任何一点 P 的坐标(x, y)满足关系 $$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$ 这便是直线方程的法线式。 已知一直线方程的一般式是 $Ax+By+C=0$，学生应懂得将它化为法线式方程 $$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$ 及了解以下的对应： $$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\alpha$$ $$\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\alpha$$

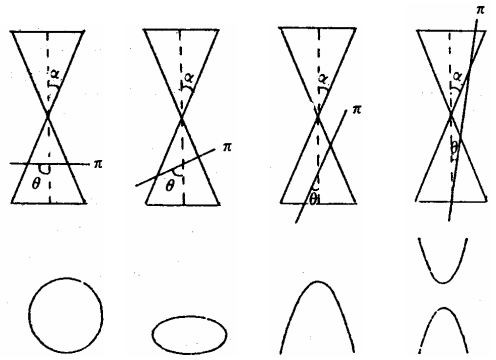
内 容	时间分配	教 学 建 议
		$$\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=-p$$ 选择适当的分母符号的规则是 (1) 若 $C\neq 0$，则分母的符号与 C 的符号相反。 (2) 若 $C=0$，则分母的符号与 B 的符号相同。 *例* 直线 $x-\sqrt{3}y+6=0$ 可转换为 $\frac{x-\sqrt{3}y+6}{-2}=0$；由此，$p=3$，及 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\alpha=120°$。 另外一种方法，是将方程 $Ax+By+C=0$ 重新排列，使右边留下一正常数，再在方程两边各除以 $\sqrt{A^2+B^2}$。例如上述方程可重新排列成 $-x+\sqrt{3}y=6$ 继而 $\frac{-x+\sqrt{3}y}{\sqrt{(-1)^2+3}}=\frac{6}{\sqrt{(-1)^2+3}}$ 或 $-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=3$ 得 $p=3$，$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ 和 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，与刚才所得的相同。 求一已知点至一直线的距离，可考虑和该直线平行且过已知点(x_0, y_0)的直线的法线式。学生应记忆公式 $d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$。 学生亦应注意到如果适当选择公式中分母的符号，则由公式计算出来的数值记号，可显示该已知点是否和原点在已知直线的同一边。若求绝对值距离，则可取所得数量的绝对值。

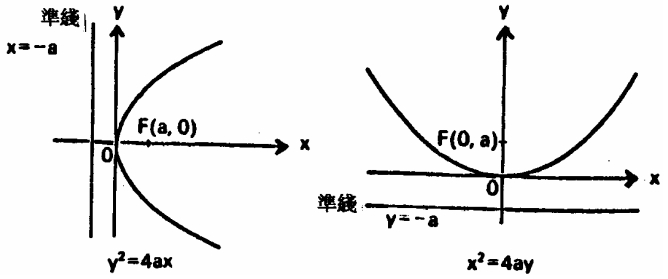
内容	时间分配	教学建议
		对能力较高的学生，可以例题方式讨论两并行线的距离和两相交直线的角平分线的基本处理方法，藉以提高他们的兴趣。 *例一* 求并行线 $12x-5y-10=0$ 及 $12x-5y+16=0$ 之间的距离。 选择其中一条线上任何一点，这点至另一直线的距离，即为两并行线的距离。假设选择了第一条在线的点 (0, –2)，该点至第二条线的距离是 $\frac{(-5)(-2)+16}{\sqrt{12^2+5^2}}=2$，这就是该两条线的距离。 *例二* 求直线 $x+y-3=0$ 和 $x-7y+5=0$ 的角平分线。 设 P(x, y)为角平分在线的一点。则由 P 至两直线的距离相等。因此， $\left\lvert\frac{x+y-3}{\sqrt{1^2+1^2}}\right\rvert=\left\lvert\frac{x-7y+5}{\sqrt{1^2+7^2}}\right\rvert$ 得 $x+3y-5=0$ 或 $3x-y-5=0$ ；它们就是两已知直线的角平分线方程。
7.7 直线族	3	这课题包括斜率为 m 的并行线族，通过已知点 (a, b) 的直线族，及通过直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线族。它们的方程分别为 $y=mx+c$， $y=k(x-a)+b$ 及$(A_1x+B_1y+C_1)+k(A_2x+B_2y+C_2)=0$。在每一种情况，直线族的方程都含有一个参数 k。 (注：直线族方程$(A_1x+B_1y+C_1)+k(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 并不包括直线 $A_2x+B_2y+C_2=0$。) 故此，教师可利用方程 $\ell(A_1x+B_1y+C_1)+k(A_2x+B_2y+C_2)=0$，其中$\ell$、k 为参数，藉以包括所有通过直线 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线。

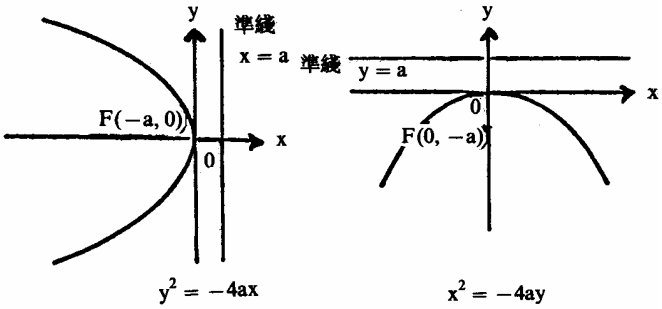
内容	时间分配	教学建议
		例一 与直线 $2x-3y+4=0$ 平行的直线族的方程是 $2x-3y+h=0$。 通过点(2, 3)的直线族方程是 $y=k(x-2)-3$，其中 h 和 k 为参数。 *例二* 求通过直线 $2x+y-1=0$ 和 $3x-2y-5=0$ 的交点及距离原点 1 单位的直线。 该直线的方程是 $(2x+y-1)+k(3x-2y-5)=0$，其中 k 为参数。k 同时应满足 $\frac{-1-5k}{\sqrt{(2+3k)^2+(1-2k)^2}}=1$。
7.8 轨迹的概念	1*+1	教师应尽量利用实际例子说明轨迹的概念，例如日常生活上移动的点、线、面积和物体所经的轨道，如像火车沿着铁轨所经过的路程，在滚动中的圆柱体边缘的点所描绘的路线及足球在空中移动的轨迹。教师更可引领学生进行一些简单轨迹的几何作图的活动。 教师应指出直线是一平面上的轨迹例子，而它并可以以直线方程在笛卡儿平面上表示出来。
7.9 圆的方程，圆与直线的交点	7*	*例* 已知两固定点 A(1, 0)及 B(0, 3)，若一点 P 移动时，其至点 A 和点 B 的距离相等，试求 P 点的轨迹方程。 利用条件 PA＝PB 便可求出一直线方程。学生应能认识到在直线上任何一点的坐标必定满足该直线方程，而直线的方程则决定直线在平面上的位置。 学生在引导下利用距离公式找出圆心在原点，半径左 r 的圆的方程。举出适当的例子后，学生应能推出方程的形式为 $x^2+y^2=r^2$。 已知上述形式的方程，学生应认识到它是代表一个圆心为原点及半径为 r 的圆。 之后，教师可考虑一般的情况，例如，圆心不在原点而在点(h, k)。透过足够的练习后，学生会发现圆的方程可写成下列其中一种形式：

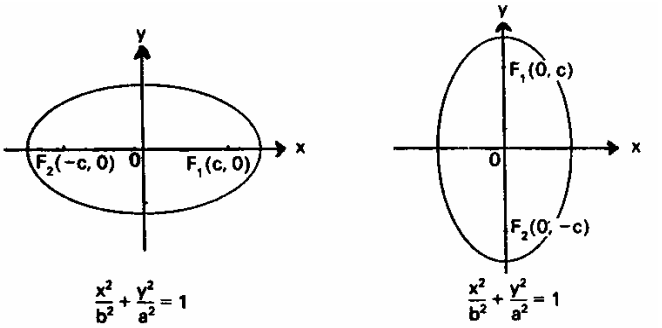
内容	时间分配	教学建议
7.10 圆的切线方程	4	$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 或 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 已知上述一种形式的方程，学生应知道它代表一个圆，同时亦应知道圆心的位置及半径的长度。 应加以讨论通过三非线性点的圆的方程。 直线与圆是否一定相交于两点呢？教师应与学生讨论所有情况，并应连同二次方程的根一起讨论，尤其是当二次方程有二重根。几何中切线的概念可以代数条件 $b^2-4ac=0$ 来表示。 教师应提供学生适当的例子，而下列的例子可作为参考。 *例一* 一圆的直径的两端点分别为 $A(x_1, y_1)$及 $B(x_2, y_2)$，试求此圆的方程。 例二 设 ΔABC 的顶点分别为 $A(-6, 5)$，$B(-3, 4)$ 及 $C(2, 1)$。试求ΔABC 的外接圆的方程。 *例三* 直线 $L: x-y-2=0$ 是否与圆 $C: x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 相交？并说出理由。 已知一圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，教师应引导学生推出通过圆上一已知点(x_1, y_1)的切线的方程，微分法的技巧在这里会有帮助。学生应找出该切线的方程为 $x_1x+y_1y+\frac{1}{2}D(x+x_1)+\frac{1}{2}E(y+y_1)+F=0$。 之后，教师可考虑一般的情况，如求出从圆外一点作一已知圆的切线的方程。教师应对学生显示如何透过解通过圆外一些的直线的方程和圆的方程而求出该圆的切线方程。 可与学生进一步讨论如何以圆心至切线的距离等于半径的事实求切线方程。

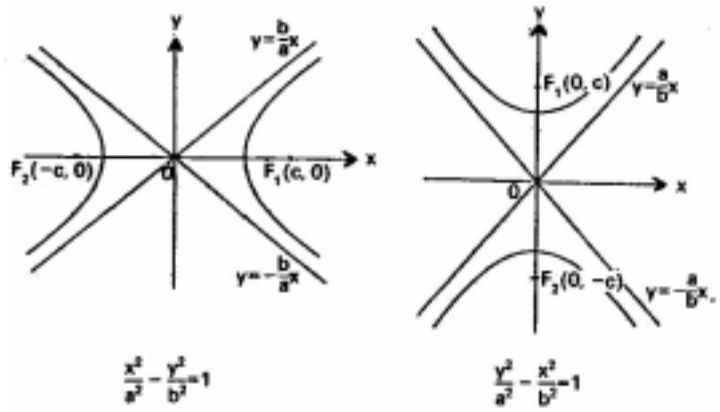
内容	时间分配	教学建议
7.11 圆族	4	*例一* 求证 $A(1, 4)$在圆 $C: x^2+y^2-2x-2y-7=0$ 上。由此，求在点 A 对 C 的切线方程。 *例二* 求平行于直线 $2x+y+3=0$ 而与圆 $x^2+y^2+6x-2y+5=0$ 相切的直线方程。 *例三* 由点 $M(-4, 4)$至圆 $C: x^2+y^2-6x-6y-7=0$ 的两切线切圆于 P 和 Q。 求 (*a*) 两切线的方程； (*b*) $\angle PMQ$； (*c*) 每一条切线段的长度； (*d*) ΔMPQ 的面积。 学生应该知道利用圆族的方程可以化简一些问题的解答方法。教师应与学生讨论以下三种情形： (1) 以 (a, b) 为圆心的同心圆族。 方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=k \quad (k>0)$ (2) 经过直线 $Ax+By+C=0$ 和圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的交点的圆族。 方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+k(Ax+By+C)=0$ (3) 经过两个圆的交点的圆族。 两个圆的方程分别为 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 及 $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 而圆族的方程为 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$ 其中 $k\neq-1$。教师应解释当 $k=-1$ 时上述方程为该两圆的公弦之方程。同时，若两圆互切，该公弦将会变成两圆的公切线。 教师可介绍以下的例子。

内容	时间分配	教学建议
7.12 标准位置上的抛物线、椭圆及双曲线	2	*例一* 求证方程 $x^2+y^2-4x+2y+F=0$，其中 F 为一常数，代表一同心圆族。 *例二* 一圆过直线 $x+y=1$ 与圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 的交点。若它的圆心在直线 $3x-y=3$ 上，求这圆的方程。 *例三* 一圆 C 过点 Q(1, 2)及圆 $x^2+y^2-3x+2y-2=0$ 与 $x^2+y^2+x+3y-10=0$ 的交点，试求圆 C 的方程及与 C 相切于 Q 的切线方程。 圆锥曲线模型可以有效地介绍圆锥曲线的概念。学生亦应能想象圆锥曲线的形状及它们如何形成。 用一平面π去切截两直立圆锥体，所得的曲线就称为圆锥曲线。若平面π与圆锥体的轴所成交角为 θ，根据 θ 的大小可得以下四种不同的曲线： 

内容	时间分配	教学建议
7.12.1 *抛物线*	3	(*a*) 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，则形成一圆。 (*b*) 当 $\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，则形成一椭圆。 (*c*) 当 $\theta=\alpha$ 时，则形成一抛物线。 (*d*) 当 $0\le\theta<\alpha$ 时，则形成一双曲线。 教师应利用教具去说明圆锥曲线的概念。 学生应熟习抛物线的定义：平面上一个动点到一固定点及到一固定直线的距离恒等，则此动点的轨迹被称为抛物线。 教师应引导学生推算抛物线的标准方程 $y^2=4ax$，及强调曲线的对称性质和 y 的定义域，而名词「焦点」，亦应予以介绍。 以下的图像有效说明抛物线的四个不同位置，它们的顶点都是原点及其轴都是坐标轴。 

内容	时间分配	教学建议
		 对能力较高的学生，可以介绍焦点和准线的简易性质。 要求学生根据已知焦点或准线方程来找出抛物线方程的例子是必须的。如下的具体例子可以加深学生的了解能力。 *例一* 描绘抛物线 $x^2 = -6y$ 的图像，并求焦点的坐标及准线方程。 *例二* 求以原点为顶点，以坐标轴为对称轴，且过点(–6, 3)的抛物线方程。 对能力较高的学生，可以介绍抛物线方程的非标准形式如 $y^2 = 4a(x-h)$或 $x^2 = 4a(y-k)$。
7.12.2 *椭圆*	3	椭圆的标准方程可从定义推导出来：平面上一动点至两个固定点的距离的和为一常数，则此动点的轨迹称为椭圆。教师应要介绍名词「焦点」、「长轴」、「半长轴」、「短轴」及「半短轴」，同时亦应讨论 a、b 和 c 的几何意义；而关系式 $a^2 - b^2 = c^2$ (其中 $a > b$ 及 $a > c$) 亦要说明。 可利用图像与学生讨论长轴在 x 轴或 y 轴上而中心在原点的不同情况。

内容	时间分配	教学建议
		 对能力较高的学生，可以介绍焦点和准线的简易性质。 学生应认识到要找出椭圆的标准方程，必须知道下列其中两个条件：长轴的长度、短轴的长度两个焦点其中一个的坐标。 *例一* 试求下列各椭圆的焦点及顶点，并描绘它们的图像： (*a*) $4x^2+9y^2 = 36$ (*b*) $25x^2+y^2 = 25$ *例二* 试求中心在原点，且满足下列已知条件的各椭圆方程： (*a*) 一焦点为(–3, 0)，一顶点为(0, 5)。 (*b*) 半长轴的长度等于 12，两焦点间的距离等于 6，而焦点在 x 轴上。 (*c*) 一顶点为(5, 0)，且过点(4, 2)。 *例三* 求与直线 $3x - 2y = 0$ 平行且与椭圆 $4x^2 + y^2 = 16$ 相切的两直线的方程。

内 容	时间分配	教 学 建 议
7.12.3 *双曲线*	3	双曲线的标准方程可从定义推导出来：平面上一动点至两个固定点的距离的差为一常数，则此动点的轨迹称为双曲线。学生应知道 a 及 c 的几何意义；而关系式 $a^2+b^2=c^2$ (其中 a＜c) 亦应介绍；从关系式中可清楚知道 a 未必大过 b。 教师可利用图像清楚介绍名词如「焦点」、「贯轴」、「半贯轴」、「共轭轴」、「半共轭轴」，学生亦应要认识以下以原点为中心及分别以 x 轴和 y 轴为贯轴的两个图像。  利用渐近线描绘双曲线是一有效方法，而学生应要掌握其几何意义。 对能力较高的学生，可以介绍焦点的简易性质。 学生应认识到要找出双曲线的标准方程，必须知道下列其中两个条件：贯轴的长度、共轭轴的长度及两个焦点其中一个的坐标。

内 容	时间分配	教 学 建 议
7.13 简易的参数方程及轨迹问题	4	*例一* 求双曲线 $9x^2-y^2=-9$ 的顶点、焦点及渐近线的方程，并描绘它的图像。 *例二* 双曲线的贯轴和共轭轴的长度分别为 8 和 10，若中心在原点及焦点在 y 轴上，求它的方程。 *例三* 试求过椭圆 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$ 右则的焦点，且和圆 $x^2+y^2=9$ 相切的直线方程。 对于能力较高的学生，可以介绍等轴曲线。 参数方程是一表示曲线方程的一个方法。而在曲线上任一点 (x, y) 都可和参数 t 相关。 教师可说明如何利用消去法将参数方程转换为方程 f(x, y)=0。例如，$x=at^2$ 及 $y=2at$ 可以写成 $y^2=4ax$，而此方程为一抛物线。 学生应认识直线及圆锥曲线的参数方程，而且，教师应强调一个函数 f(x, y)=0 可以有多个的参数表示方法。 教师应提供学生一些牵涉以参数形式表示轨迹的问题，用以帮助他们熟习有关的概念及技巧。以下是一些例子。 *例一* 从下列的参数方程得出关于 x 和 y 的方程： (*a*) $x=t^2-2t$，$y=t^2+2$。 (*b*) $x=\tan\alpha+\cot\alpha$ ， $y=\tan\alpha-\cot\alpha$ 。 *例二* 利用 $y=tx$，试求曲线 $x^3+y^3=6xy$ 的参数方程。 *例三* 已知抛物线的方程为 $y^2=4ax$。

内 容	时间分配	教 学 建 议
		(*a*) 求证 $P_1(at_1^2, 2at_1)$和 $P_2(at_2^2, 2at_2)$皆为此抛物线上的点。 (*b*) 若 M 为 P_1P_2 的中点，试以 t_1 和 t_2 表点 M 的坐标。 (*c*) 设 O 为原点，若 OP_1 垂直于 OP_2，试求点 M 的轨迹方程。
	11*+39	