# 3. 課　程

**單元 1：數學歸納法原理**

*特定目標：*

1. 理解數學歸納法的概念。
2. 熟習數學歸納法的步驟。
3. 在各方面應用數學歸納法。

| 內 容 | 時 間 分 配 | 教 學 建 議 |
|---|---|---|
| **1.1 數學歸納法的概念** | 2 | 學生應認識到有些公式只對正整數才成立。例子包括等差級數及等比級數 n 項和的公式。<br>那些公式雖或可用其他方法求得，但亦可利用公式中的變數是正整數的特點，用另一種方法來證明。這種方法就是「數學歸納法」。<br>教師可先用一些簡單但不常見的公式，以作說明。例如：<br>$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$<br>當 n = 1、2 及 3 時，這公式成立。我們預期這公式對所有正整數 n 都成立。但我們怎作保證呢？例如，當 n = 100 或 257 時，我們怎知道那公式仍然成立？這就須證明其有效性了。 |
| **1.2 數學歸納法的步驟** | 2 | 數學歸納法的步驟可用一簡單的例子帶出，而不應一開始便引用一般命題 P(n)。所得結果可於稍後才總結為一般性。<br>教師應特別注重數學歸納法證明時的表達方式。以下是一個例子。 |

11

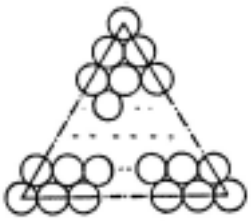
| 內 容 | 時 間 分 配 | 教 學 建 議 |
|---|---|---|
| | | 例<br>求證對所有正整數 n,<br>$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 。<br>設 P(n) 為命題 “$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ”。<br>當 n = 1, 左方 = 1<br>右方 = $\frac{1(1+1)}{2}=1$<br>∴ 左方 = 右方<br>故 P(1) 成立。<br>假設 P(k)成立，即<br>$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ 。<br>當 n = k + 1,<br>左方 = $1+2+3+\cdots+k+(k+1)$<br>= $\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$<br>= $(k+1)(\frac{k}{2}+1)$<br>= $\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$<br>= 右方<br>∴ P(k + 1) 亦成立。<br>根據數學歸納法原理，P(n) 對所有正整數 n 皆成立。<br>用來介紹數學歸納法步驟的例子，不應涉及太多運算，否則會分散學生的注意力，而不能集中理解基本的論點。以下是另一些有用的例子： |

12

| 內 容 | 時 間 分 配 | 教 學 建 議 |
|---|---|---|
| **1.3 數學歸納法的應用** | 4 | $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$<br>及 $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$<br>教師如今可介紹一些較複雜的例子，以說明數學歸納法的效用。例如：證明對任何正整數 n,<br>(1) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)$<br>(2) $1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+(n-2)2+n\cdot 1 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$<br>(3) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin n\alpha$<br>$=\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$<br>其中 $\alpha$ 並不等於 $2\pi$ 的倍數。<br>(若學生已學過有關的三角函數公式，則此題可給學生作例子；否則可留待複習時用。)<br>除可用來證明級數和的公式外，數學歸納法的應用，還應包括以下各類：<br>(1) 可整除性的證明，例如,<br>(*a*) $7^n+3n-1$ 可被 9 整除<br>(*b*) $23^n-1$ 可被 11 整除<br>(*c*) $a^{2n-1}+b^{2n-1}$ 可被 a + b 整除<br>例 (*c*) 可證明如下：<br>設 P(n) 為 “ $a^{2n-1}+b^{2n-1}$ 可被 a + b 整除”。 |



| 內 容 | 時 間 分 配 | 教 學 建 議 |
|---|---|---|
| | | 當 n = 1,<br>$a^{2n-1}+b^{2n-1}=a+b$<br>$\therefore$P(1) 成立。<br>假設 P(k) 成立,<br>即 $a^{2k-1}+b^{2k-1}=m(a+b)$。<br>當 n = k + 1 時,<br>$a^{2(k+1)-1}+b^{2(k+1)-1}=a^{2k+1}+b^{2k+1}$<br>$=a^2\cdot a^{2k-1}+b^2\cdot b^{2k-1}$<br>$=a^2\cdot a^{2k-1}+a^2\cdot b^{2k-1}-a^2\cdot b^{2k-1}+b^2\cdot b^{2k-1}$<br>$=a^2(a^{2k-1}+b^{2k-1})-(a^2-b^2)b^{2k-1}$<br>$=a^2m(a+b)-(a+b)(a-b)b^{2k-1}$<br>$=(a+b)[a^2m-(a-b)b^{2k-1}]$,<br>而此式可被 (a + b) 整除。<br>即 P(k + 1) 亦成立。<br>根據數學歸納法原理，P(n) 對所有正整數 n 成立。<br>(2) 簡易不等式證明，例如,<br>(*a*) 若 $x\geq -1$，則<br>$(1+x)^n\geq 1+nx$<br>(*b*) 對正數 $a_i$ (i＝1, 2, …, n),<br>$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geq 1+(a_1+a_2+\ldots+a_n)$<br>(*c*) $2^n>n^2$，其中 $n\geq 5$<br>例 (*c*) 可證明如下：<br>設 P(n) 為 “ $2^n>n^2$，其中 $n\geq 5$ ”。<br>當 n = 5,<br>左方 = $2^5=32$<br>右方 = $5^2=25$ |

| 內 容 | 時 間 分 配 | 教 學 建 議 |
|---|---|---|
| | | $\therefore$ 左方 > 右方。<br>$\therefore$ P(5) 成立。<br>假設 P(k) 成立,<br>即 $2^k > k^2$, 其中 $k \geq 5$ 。<br>當 $n = k + l$,<br>$2^{k+1} - (k+1)^2 = 2^{k+1} - k^2 - 2k - 1$<br>$= 2 \cdot 2^k - 2k^2 + k^2 - 5k + 3k - 15 + 14$<br>$= 2(2^k - k^2) + k(k-5) + 3(k-5) + 14 > 0$<br>$\therefore 2^{k+1} > (k+1)^2$<br>$\therefore$ P(k + 1) 成立<br>根據數學歸納法原理, P(n), 而 $n \geq 5$ , 成立。<br>(3) 簡易應用問題, 例如求圖中所示金字塔堆中共有球多少個球。<br>  <br>教師應提醒學生, 在有些命題中, n 不是由 1 開始的。例如 $2^n > n^2$ 便須 $n \geq 5$ 。 |
| | 8 | |