# 3. 课　程

单元 1：数学归纳法原理

*特定目标：*

1. 理解数学归纳法的概念。
2. 熟习数学归纳法的步骤。
3. 在各方面应用数学归纳法。

| 内 容 | 时间分配 | 教 学 建 议 |
|---|---|---|
| **1.1** 数学归纳法的概念 | 2 | 学生应认识到有些公式只对正整数才成立。例子包括等差级数及等比级数 n 项和的公式。<br>那些公式虽或可用其它方法求得，但亦可利用公式中的变量是正整数的特点，用另一种方法来证明。这种方法就是「数学归纳法」。<br>教师可先用一些简单但不常见的公式，以作说明。例如：<br>$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$<br>当 n = 1、2 及 3 时，这公式成立。我们预期这公式对所有正整数 n 都成立。但我们怎作保证呢？例如，当 n = 100 或 257 时，我们怎知道那公式仍然成立？这就须证明其有效性了。 |
| **1.2** 数学归纳法的步骤 | 2 | 数学归纳法的步骤可用一简单的例子带出，而不应一开始便引用一般命题 P(n)。所得结果可于稍后才总结为一般性。<br>教师应特别注重数学归纳法证明时的表达方式。以下是一个例子。 |

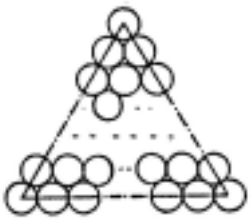
11

| 内 容 | 时间分配 | 教 学 建 议 |
|---|---|---|
| | | 例<br>求证对所有正整数 n，<br>$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 。<br>设 P(n) 为命题“$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$”。<br>当 n = 1， 左方 = 1<br>右方 = $\frac{1(1+1)}{2}=1$<br>∴ 左方 = 右方<br>故 P(1) 成立。<br>假设 P(k)成立，即<br>$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ 。<br>当 n = k + 1，<br>左方 = $1+2+3+\cdots+k+(k+1)$<br>= $\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$<br>= $(k+1)(\frac{k}{2}+1)$<br>= $\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$<br>= 右方<br>∴ P(k + 1) 亦成立。<br>根据数学归纳法原理，P(n) 对所有正整数 n 皆成立。<br>用来介绍数学归纳法步骤的例子，不应涉及太多运算，否则会分散学生的注意力，而不能集中理解基本的论点。以下是另一些有用的例子： |

12

| 内 容 | 时间分配 | 教 学 建 议 |
|---|---|---|
| **1.3** 数学归纳法的应用 | 4 | $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$<br>及 $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$<br>教师如今可介绍一些较复杂的例子，以说明数学归纳法的效用。例如：证明对任何正整数 n，<br>(1) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)$<br>(2) $1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+(n-2)2+n\cdot 1 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$<br>(3) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin n\alpha$<br>$=\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$<br>其中 $\alpha$ 并不等于 $2\pi$ 的倍数。<br>(若学生已学过有关的三角函数公式，则此题可给学生作例子；否则可留待复习时用。)<br>除可用来证明级数和的公式外，数学归纳法的应用，还应包括以下各类：<br>(1) 可整除性的证明，例如，<br>(*a*) $7^n+3n-1$ 可被 9 整除<br>(*b*) $23^n-1$ 可被 11 整除<br>(*c*) $a^{2n-1}+b^{2n-1}$ 可被 a + b 整除<br>例 (*c*) 可证明如下：<br>设 P(n) 为 “$a^{2n-1}+b^{2n-1}$ 可被 a + b 整除”。 |

| 内 容 | 时间分配 | 教 学 建 议 |
|---|---|---|
| | | 当 n = 1，<br>$a^{2n-1}+b^{2n-1}=a+b$<br>$\therefore$P(1) 成立。<br>假设 P(k) 成立，<br>即 $a^{2k-1}+b^{2k-1}=m(a+b)$。<br>当 n = k + 1 时，<br>$a^{2(k+1)-1}+b^{2(k+1)-1}=a^{2k+1}+b^{2k+1}$<br>$=a^2\cdot a^{2k-1}+b^2\cdot b^{2k-1}$<br>$=a^2\cdot a^{2k-1}+a^2\cdot b^{2k-1}-a^2\cdot b^{2k-1}+b^2\cdot b^{2k-1}$<br>$=a^2(a^{2k-1}+b^{2k-1})-(a^2-b^2)b^{2k-1}$<br>$=a^2m(a+b)-(a+b)(a-b)b^{2k-1}$<br>$=(a+b)[a^2m-(a-b)b^{2k-1}]$，<br>而此式可被 (a + b) 整除。<br>即 P(k + 1) 亦成立。<br>根据数学归纳法原理，P(n) 对所有正整数 n 成立。<br>(2) 简易不等式证明，例如，<br>(*a*) 若 $x\geq -1$，则<br>$(1+x)^n\geq 1+nx$<br>(*b*) 对正数 $a_i$ (i＝1, 2, …, n)，<br>$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geq 1+(a_1+a_2+\ldots+a_n)$<br>(*c*) $2^n>n^2$，其中 $n\geq 5$<br>例 (*c*) 可证明如下：<br>设 P(n) 为 “$2^n>n^2$，其中 $n\geq 5$”。<br>当 n = 5，<br>左方 = $2^5=32$<br>右方 = $5^2=25$ |

| 内 容 | 时间分配 | 教 学 建 议 |
| --- | --- | --- |
| | | $\therefore$ 左方 > 右方。<br>$\therefore$ P(5) 成立。<br>假设 P(k) 成立，<br>即 $2^k > k^2$，其中 $k \geq 5$ 。<br>当 $n = k + 1$，<br>$2^{k+1} - (k+1)^2 = 2^{k+1} - k^2 - 2k - 1$<br>$= 2 \cdot 2^k - 2k^2 + k^2 - 5k + 3k - 15 + 14$<br>$= 2(2^k - k^2) + k(k-5) + 3(k-5) + 14 > 0$<br>$\therefore 2^{k+1} > (k+1)^2$<br>$\therefore$ P(k + 1) 成立<br>根据数学归纳法原理，P(n)，而 $n \geq 5$ ，成立。<br>(3) 简易应用问题，例如求图中所示金字塔堆中共有球多少个球。<br>  <br>教师应提醒学生，在有些命题中，n 不是由 1 开始的。例如 $2^n > n^2$ 便须 $n \geq 5$ 。 |
| | 8 | |